ОБЪ ОПРЕДѢЛЕНІИ

ОБЩИХЪ КОРНЕЙ ДВУХЪ УРАВНЕНІЙ

ПОМОЩЬЮ ИХЪ РЕЗУЛЬТАНТА.

М. Г. Баранецкаго.

ВАРШАВА.
Въ Типографіи Ивана Носковскаго.
Мазовецкая улица № 11.

1877.

ОБЪ ОПРЕДѢЛЕНІИ
ОБЩИХЪ КОРНЕЙ ДВУХЪ УРАВНЕНІЙ
помощью ихъ результанта.

Статья приватъ - доцента Марія Баранецкаго.

Читая въ н. а. году лекціи по „Линейнымъ преобразованіямъ“, я долженъ былъ подробно передѣлывать нѣкоторыя исчисленія, указанныя въ сочиненіи „Lessons introductory to the modern higher algebra by George Salmon...“, и на соотвѣтственно подысканныхъ примѣрахъ пояснять теоретически выведенные результаты. При этомъ обнаружилась неточность, повторяющаяся во всѣхъ трехъ изданіяхъ этого образцоваго сочиненія, равно какъ и въ обоихъ изданіяхъ „Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen von George Salmon. Deutsch bearbeitet von Wilhelm Fiedler“, въ „Leçons d'algèbre supérieure par G. Salmon... traduit par Bazin“ и въ переводѣ, составляющемъ второй томъ сочиненія „Wykład zupełny algebry.... Adolf Sągajło“.

Я намѣренъ вкратцѣ изложить теорію опредѣленія общихъ корней двухъ уравненій помощью результанта этихъ уравненій и вводимое мною измѣненіе повѣрить на примѣрѣ.

§ 1. Если даны два уравненія:

$$(1) \begin{cases} a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots = 0, \text{ или } \varphi(x) = 0, \\ b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots = 0, \text{ или } \psi(x) = 0, \end{cases}$$

и если

$$(2)\qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$$

суть корни уравненія

$$\psi(x) = 0,$$

то, подставивъ количества (2) вмѣсто перемѣннаго x въ первую часть уравненія

$$\varphi(x) = 0,$$

и перемноживъ между собою результаты этихъ подстановокъ

$$\varphi(\alpha), \varphi(\beta), \varphi(\gamma), \varphi(\delta), \ldots.$$

мы можемъ, въ полученномъ произведеніи

$$(3)\qquad \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma)\varphi(\delta) \ldots = R,$$

сімметрическія функціи количествъ (2) выразить помощью коэффиціентовъ уравненія

$$\psi(x) = 0.$$

Тогда R явится однородной функціей коэффиціентовъ уравненій (1), тождественно обращающейся въ нуль въ случаѣ, если уравненія (1) имѣютъ общее рѣшеніе. Эту функцію R называютъ результантомъ или элиминантомъ этихъ уравненій.

Если уравненія (1) имѣютъ общее рѣшеніе, то оно заключается въ ряду чиселъ (2). Пусть α будетъ общимъ корнемъ уравненій (1); тогда

$$(4)\qquad \varphi(\alpha) = 0,$$

и поэтому, на основаніи опредѣленія (3), тожественно

$$R = 0.$$

Но вообще

$$\varphi(\alpha) = a_m\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1} + \dots$$

$$\varphi(\beta) = a_m\beta^m + a_{m-1}\beta^{m-1} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

откуда

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{da_p} = \alpha^p; \quad \frac{d\varphi(\beta)}{da_p} = \beta^p; \quad \dots\dots;$$

такъ что

$$(5) \qquad \frac{dR}{da_p} = \alpha^p\varphi(\beta)\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\dots + \varphi(\alpha)\beta^p\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\dots + \dots$$

Слѣдовательно, если α есть общій корень уравненій (1), то, на основаніи (4), выраженіе для $\frac{dR}{da_p}$ сводится, въ этомъ случаѣ, къ одному члену, а именно

$$(6) \qquad \frac{dR}{da_p} = \alpha^p\varphi(\beta)\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\dots$$

Такимъ же образомъ найдемъ, что, въ нашемъ случаѣ,

$$(7) \qquad \frac{dR}{da_q} = \alpha^q\varphi(\beta)\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\dots$$

Изъ выраженій (6) и (7) слѣдуетъ, что

$$\frac{dR}{da_p} : \frac{dR}{da_q} = \alpha^p : \alpha^q,$$

$$= \alpha^{p-q},$$

что, какъ видимъ, дозволяетъ опредѣлить общій корень α помощью производныхъ результанта R по какимъ нибудь коэффиціентамъ одного изъ уравненій (1). Если бы мы взяли производныя результанта по смежнымъ коэффиціентамъ одного изъ уравненій (1), то получили бы непосредственно

$$\frac{dR}{da_p} : \frac{dR}{da_{p-1}} = \alpha^p : \alpha^{p-1} = \alpha.$$

Такимъ образомъ, имѣя результантъ двухъ уравненій, можемъ, не рѣшая этихъ уравненій, опредѣлить общій ихъ корень, если таковой имѣется.

Напр. результантъ двухъ уравненій

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

будетъ

$$R = a^2C^2 - abBC + ac(B^2 - 2AC) + b^2AC - bcAB + c^2A^2,$$

откуда

$$\frac{dR}{da} = 2aC^2 - bBC + c(B^2 - 2AC),$$

$$\frac{dR}{db} = -aBC + 2bAC - cAB.$$

Если даны два уравненія

$$x^2 - 4 = 0,$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

то

$$\frac{dR}{da} = 48; \quad \frac{dR}{db} = 24,$$

и можемъ опредѣлить общій корень данныхъ уравненій

$$\frac{dR}{da} : \frac{dR}{db} = 2.$$

§ 2. Если бы однакожъ уравненія (1) имѣли два общіе корня, напр. α и β, то, какъ видно изъ выраженій (6) и (7), первыя производныя относительно каждаго изъ коэффиціентовъ обращаются въ нуль, ибо тогда

$$\varphi(\beta) = 0.$$

Но, дифференцируя еще разъ относительно a_r общее выраженіе первой производной, т. е. выраженіе (5), мы получимъ

$$\begin{aligned}\frac{d^2R}{da_r{}^2} = {} & \alpha^r\beta^r\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots + \alpha^r\varphi(\beta)\gamma^r\varphi(\delta)\ldots + \ldots \\ & + \alpha^r\beta^r\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots + \varphi(\alpha)\beta^r\gamma^r\varphi(\delta)\ldots + \ldots \\ & + \alpha^r\varphi(\beta)\gamma^r\varphi(\delta)\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Если теперь примемъ, что α и β суть два общіе корни уравненій (1), то, такъ какъ

$$\varphi(\alpha) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\beta) = 0,$$

въ выписанномъ выраженіи второй производной, всѣ члены, за исключеніемъ первыхъ членовъ первыхъ двухъ строкъ, обращаются въ нуль, такъ что

$$(8) \qquad \frac{d^2R}{da_r{}^2} = 2\alpha^r\beta^r\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots$$

Такимъ же образомъ выведемъ для нашего случая

$$(9)\qquad \frac{d^2R}{da_p da_q} = (\alpha^p\beta^q + \alpha^q\beta^p)\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots,$$

$$(10)\qquad \frac{d^2R}{da_q{}^2} = 2\alpha^q\beta^q\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots$$

Изъ выраженій (8), (9) и (10) слѣдуетъ

$$\alpha^p\beta^p = \frac{1}{2\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots} \times \frac{d^2R}{da_p{}^2},$$

$$\alpha^p\beta^q - \alpha^q\beta^p = \frac{1}{\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots} \times \frac{d^2R}{da_p da_q},$$

$$\alpha^q\beta^q = \frac{1}{2\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots} \times \frac{d^2R}{da_q{}^2}.$$

Принимая, что отношенія

$$\alpha^p : \alpha^q \quad \text{и} \quad \beta^p : \beta^q$$

суть рѣшенія однороднаго квадратнаго уравненія, мы видимъ изъ послѣднихъ выраженій, что это квадратное уравненіе есть

$$\frac{1}{2\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots}\lambda^2\frac{d^2R}{da_q{}^2} - \frac{1}{\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots}\lambda\mu\frac{d^2R}{da_p da_q} + \frac{1}{2\varphi(\gamma)\varphi(\delta)\ldots}\frac{d^2R}{da_p{}^2} = 0,$$

или

$$(11)\qquad \lambda^2\frac{d^2R}{da_q{}^2} - 2\lambda\mu\frac{d^2R}{da_p da_q} + \mu^2\frac{d^2R}{da_p{}^2} = 0.$$

Опредѣливъ рѣшенія этого уравненія, которыя обозначимъ

$$\lambda' : \mu' \quad \text{и} \quad \lambda'' : \mu'',$$

будемъ имѣть искомые общіе корни уравненій (1), ибо

$$\lambda' : \mu' = \alpha^p : \alpha^q,$$

$$= \alpha^{p-q};$$

$$\lambda'' : \mu'' = \beta^p : \beta^q,$$

$$= \beta^{p-q}.$$

Изъ этого видимъ, что, не рѣшая уравненій (1), можно опредѣлить оба общіе ихъ корни, при помощи результанта этихъ уравненій, ибо, имѣя выраженіе результанта, легко составить уравненіе (11). Если бы мы взяли производныя по смежнымъ коэффиціентамъ одного изъ уравненій (1), то тогда непосредственно изъ уравненія

$$\lambda^2 \frac{d^2R}{da_{p-1}{}^2} - 2\lambda\mu \frac{d^2R}{da_p da_{p-1}} + \mu^2 \frac{d^2R}{da_p{}^2} = 0.$$

опредѣлимъ

$$\lambda' : \mu' = \alpha,$$

$$\lambda'' : \mu'' = \beta.$$

Въ случаѣ, если уравненія (1) имѣютъ три общіе корни, выраженія (8), (9) и (10), т. е. вторыя производныя результанта относительно коэффиціентовъ уравненій (1), равны нулю, но тогда, при помощи того же пріема, можемъ воспользоваться третьими производными результанта относительно коэффиціентовъ одного изъ уравненій (1), чтобъ, не рѣшая этихъ уравненій, опредѣлить ихъ общіе корни. И т. д.

§ 3. Какъ Salmon *), такъ и переводчики его сочиненія **), вмѣсто того, чтобъ взять вторую производную общаго выраженія (5) первой производной и въ полученномъ общемъ выраженіи второй производной принять

$$\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi(\beta) = 0,$$

поступаютъ иначе. Въ первой производной принимаютъ уже

$$\varphi(\alpha) = 0$$

и упрощенное такимъ образомъ выраженіе первой производной

$$\frac{dR}{da_p} = \alpha^p\varphi(\beta)\varphi(\gamma)\varphi(\delta)...$$

дифференцируютъ еще разъ относительно a_p, а въ полученномъ выраженіи второй производной принимаютъ, что и

$$\varphi(\beta) = 0.$$

Этотъ неточный пріемъ ведетъ къ тому, что, вмѣсто выраженій (8) и (10), получаютъ ***)

---

*) Lessons... 3-ье изданіе (1876), глава: „Determination of common roots", стр. 91.

**) Fiedler. Vorlesungen.... 2-ое изданіе (1877), стр. 119.
Bazin. Leçons.... (1868), стр. 63.
Sągajło. Wykład.... 2-ой томъ (1874), стр. 111.

***) „$\frac{d^2R}{da_p^2}$ . . . . reduces to the single term $\alpha^p\beta^p\varphi(\gamma)\varphi(\delta)$......." (Salmon. l. c.).

$$\frac{d^2R}{da_p^2} = \alpha^p\beta^p\varphi(\gamma)\varphi(\delta)....,$$

$$\frac{d^2R}{da_q^2} = \alpha^q\beta^q\varphi(\gamma)\varphi(\delta)....,$$

вслѣдствіе чего, вмѣсто уравненія (11), имѣютъ, для опредѣленія общихъ корней уравненій (1), уравненіе

$$(12) \qquad \lambda^2\frac{d^2R}{da_q^2} - \lambda\mu\frac{d^2R}{da_p da_q} + \mu^2\frac{d^2R}{da_p^2} = 0.$$

§ 4. Можемъ на примѣрѣ легко повѣрить, что уравненіе (12) не может служить для опредѣленія общихъ рѣшеній уравненій (1) и что уравненіе (11) дастъ намъ эти рѣшенія.

Возьмемъ два уравненія третьей степени

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0;$$

результантъ этихъ уравненій, какъ извѣстно, есть

$$R = a^3D^3 - a^2bCD^2 + a^2cD(C^2-2BD) - a^2d(C^3-3BCD+3AD^2)$$
$$+ ab^2BD^2 - abcD(BC-3AD) + abd(BC^2-2B^2D-ACD)$$
$$+ ac^2D(B^2-2AC) + acd(2AC^2+ABD-B^2C)$$
$$+ ad^2(B^3-3ABC+3A^2D) - b^3AD^2 + b^2cACD$$
$$- b^2dA(C^2-2BD) - bc^2ABD + bcdA(BC-3AD)$$
$$- bd^2A(B^2-2AC) + c^3A^2D - c^2dA^2C + cd^2A^2B - d^3A^3.$$

Если этими уравненіями будутъ напр. уравненія

$$x^3 + 1 = 0,$$

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0,$$

то

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 1;$$

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 2, \quad d = -1.$$

Пропуская въ производныхъ результанта члены, имѣющіе производителями коэффиціенты B или C, найдемъ, что, въ нашемъ случаѣ,

$$\frac{d^2R}{da^2} = 6aD^3 - 6dAD^2 = 6 + 6 = 12,$$

$$\frac{d^2R}{dadb} = 3cAD^2 = 6,$$

$$\frac{d^2R}{db^2} = -6bAD^2 = + 12.$$

Вслѣдствіе этого, уравненіе Salmon'а для опредѣленія общихъ рѣшеній будетъ

$$(12) \qquad 12\lambda^2 - 6\lambda\mu + 12\mu^2 = 0,$$

тогда, какъ наше уравненіе будетъ другое, а именно

$$(11) \qquad 12\lambda^2 - 2.6\lambda\mu + 12\mu^2 = 0,$$

или

$$\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2 = 0,$$

или еще

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1 = 0.$$

Это уравненіе дѣйствительно опредѣляетъ общія рѣшенія данныхъ уравненій, ибо первыя ихъ части могутъ быть представлены въ такомъ еще видѣ:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 \;\; x + 1),$$

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 1).$$

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Варшавскаго Университета.

Ректоръ Н. Благовѣщенскій.